Nombre de zéros d'une équation différentielle

Leçon :

Réf : Queffélec - Zuily p 404

Contexte : Il est souvent compliqué d'obtenir une résolution explicite d'une EDO, on s'intéresse alors souvent à des études qualitatives, notamment le nombre de zéros d'une solution.

Théorème Soit $a \in \mathbb{R}$ et $q \in \mathcal{C}^1([a,+\infty[)$, $q>0$, telle que
$$\int_a^{+\infty} \sqrt{q(u)}\,du = +\infty \quad \text{et} \quad q'(x) \underset{x\to+\infty}{=} o(q^{3/2}(x)).$$
Alors, si y est une solution non nulle de $y''+qy=0$ sur $[a,+\infty[$, et si $N(x)$ désigne le nombre de zéros de y sur $[a,x]$, on a
$$N(x) \underset{x\to+\infty}{\sim} \frac{1}{\pi}\int_a^x \sqrt{q(u)}\,du.$$

La preuve utilise le lemme technique ci-dessous. (passage coordonnées polaires)

Lemme Soit $a \in \mathbb{R}$ et soit $y_1, y_2 \in \mathcal{C}^1([a,+\infty[,\mathbb{R})$ sans zéro commun. On pose $\omega = y_1y_2' - y_2y_1'$. Si $y_1(a)+iy_2(a) = r_0e^{i\theta_0}$, on peut écrire $y_1 = r\cos\theta$ et $y_2 = r\sin\theta$

où $r, \theta \in \mathcal{C}^1([a,+\infty[,\mathbb{R})$ sont donnés par :
$$r = \sqrt{y_1^2+y_2^2}, \quad \theta(x) = \theta_0 + \int_a^x \frac{\omega(t)}{r^2(t)}\,dt.$$

Preuve

On pose $\varphi = y_1 + iy_2 \neq 0$ (car y_1 et y_2 n'ont pas de zéros communs), et $\psi : x \mapsto \int_a^x \frac{\varphi'(t)}{\varphi(t)}\,dt + \mathrm{Log}(r_0) + i\theta_0$.

(But : $\varphi(x)e^{-\psi(x)} = \varphi(a)e^{\psi(a)}$).

Alors $(\varphi e^{-\psi})' = (\varphi' - \varphi\psi')e^{-\psi} = (\varphi' - \varphi\frac{\varphi'}{\varphi})e^{-\psi} = 0.$

Donc $\varphi(x)e^{-\psi(x)} = \varphi(a)e^{-\psi(a)}$

$$= r_0 e^{i\theta_0} e^{-\ln r_0 - i\theta_0}$$

$$= 1.$$

Donc $\varphi = e^{\psi} = r e^{i\theta}$ où $\boxed{r = \sqrt{y_1^2 + y_2^2}}$ et où $\theta = \mathrm{Im}\,\psi$.

Or, $\psi(x) = \ln r_0 + i\theta_0 + \int_a^x \frac{y_1'(t) + i y_2'(t)}{y_1(t) + i y_2(t)} dt$ $\qquad (r_0 > 0)$

$$= \ln r_0 + i\theta_0 + \int_a^x \frac{(y_1'(t) + i y_2'(t))}{r^2(t)} \times (y_1(t) - i y_2(t))\, dt$$

$$= \ln r_0 + i\theta_0 + \int_a^x \frac{1}{r^2(t)} \Big[\big(y_1'(t) y_1(t) + y_2'(t) y_2(t) \big) + i \big(y_1(t) y_2'(t) - y_2(t) y_1'(t) \big) \Big] dt$$

Ainsi, $\boxed{\theta(x) = \mathrm{Im}\,\psi(x) = \theta_0 + \int_a^x \frac{w(t)}{r^2(t)} dt.}$

$\square$

Preuve (du théorème)

- Étape 1 : changement de variable.

On pose $T : [a, +\infty[\to \mathbb{R}$, $x \mapsto \int_a^x \sqrt{q(u)}\, du$. T est par hypothèse

une bijection croissante de $[a, +\infty[$ sur $[0, +\infty[$, de classe $\mathcal{C}^1$.

On pose alors $Y = y \circ T^{-1}$, T^{-1} bijecto de $[0, +\infty[$ sur $[a, +\infty[$, où y est une solution non nulle.

Ainsi, pour $x \in [a, +\infty[$:

- $y(x) = Y(T(x))$
- $y'(x) = T'(x)\, Y'(T(x)) = \sqrt{q(x)}\, Y'(T(x))$
- $y''(x) = \frac{q'(x)}{2\sqrt{q(x)}} Y'(T(x)) + q(x) Y''(T(x))$.

Donc $\theta'(t) \underset{t\to+\infty}{\sim} 1$, donc $\theta(t) \underset{t\to+\infty}{\sim} t$. (intégrat° des ~).

On note $\Pi(t)$ le nombre de zéros de Y sur $[0,t]$.

On va montrer que $\Pi(t) \sim \frac{t}{\pi}$ quand $t \to +\infty$.

Précision : pourquoi $\Pi(t) < +\infty$?

Par l'absurde, si il existe $t_0 > 0$ tq $\Pi(t_0) = +\infty$.

Soit alors $(u_n)_n$ une suite de zéros tendant vers un point ~~d'applicat~~ d'accumulation u.

Alors $0 = \dfrac{Y(u_n) - Y(u)}{u_n - u} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} Y'(u) = Y(u) = 0$

contradiction.

$Y = r \sin\theta$, donc $\Pi(t) \underset{t\to+\infty}{\sim} \#\{u \in [t_0, t] : \sin\theta(u) = 0\}$.

où $t_0 \geq 0$ est tq $\forall t \geq t_0 \quad \theta'(t) > 0 \quad (\theta'(t) \to 1)$.

Or, sur $[t_0, t]$, θ est un $\mathcal{C}^1$-difféomorphisme de $[t_0, t]$ sur $[\theta(t_0), \theta(t)]$. Donc

$$\left[\begin{aligned} \Pi(t) &\underset{t\to+\infty}{\sim} \#\{v \in [\theta(t_0), \theta(t)], \sin v = 0\} \\ &= \#\{k \in \mathbb{Z},\ \theta(t_0) \leq k\pi \leq \theta(t)\} \\ &\underset{t\to+\infty}{\sim} \frac{\theta(t) - \theta(t_0)}{\pi} \underset{t\to+\infty}{\sim} \frac{\theta(t)}{\pi} \underset{t\to+\infty}{\sim} \frac{t}{\pi}. \end{aligned}\right]$$

Pour finir, on remarque que $N(x) = \Pi(T(x))$.

(car $Y = y \circ T^{-1}$ et T bijection croissante de $[a, +\infty[$ sur $[0, +\infty[$).

Donc, comme $\lim_{x\to+\infty} T(x) = +\infty$, $\lim_{x\to+\infty} \dfrac{\Pi(T(x))}{T(x)} = \dfrac{1}{\pi}$.

Ainsi $N(x) \underset{x\to+\infty}{\sim} \dfrac{T(x)}{\pi} = \dfrac{1}{\pi}\displaystyle\int_a^x \sqrt{q(u)}\, du$.

$\square$

L'équation devient alors :

$$\frac{q'(x)}{2\sqrt{q(x)}} Y'(T(x)) + q(x) Y''(T(x)) + q(x) Y(T(x)) = 0$$

$$\Leftrightarrow \quad Y''(T(x)) + \frac{q'(x)}{2q(x)^{3/2}} Y'(T(x)) + Y(T(x)) = 0$$

$(q > 0)$

Ensuite, en posant $t = T(x)$ et $\varphi(t) = \frac{q'(x)}{2q(x)^{3/2}}$ pour $T(x) = t$ $(x = T^{-1}(t))$.

On a $\underline{Y''(t) + \varphi(t) Y'(t) + Y(t) = 0}$ sur $t \geq 0$.

Étape 2 : coordonnées polaires

Y et Y' sont sans zéros communs (on aurait $Y \equiv 0$ et $y \equiv 0$ sinon) et sont de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[0, +\infty[$.

Ainsi on peut écrire $\quad Y = r\sin\theta \; , \; Y' = r\cos\theta$

avec $r, \theta \in \mathcal{C}^1([0, +\infty[, \mathbb{R})$.

En dérivant on obtient le système :

$$\begin{cases} Y' = r'\sin\theta + r\theta'\cos\theta = r\cos\theta \\ Y'' = r'\cos\theta - r\theta'\sin\theta = -\varphi r\cos\theta - r\sin\theta \end{cases}$$

Ainsi, $r\theta' = r\theta'(\cos\theta^2 + \sin\theta^2)$

$$= r\cos\theta^2 - r'\cos\theta\sin\theta + r'\cos\theta\sin\theta + \varphi r\cos\theta\sin\theta + r\sin\theta^2$$

$$= r + \varphi r\cos\theta\sin\theta$$

Donc $\theta' = 1 + \varphi\cos\theta\sin\theta$

$$\Rightarrow \forall t \geq 0 \quad |\theta'(t) - 1| \leq |\varphi(t)|\,|\sin\theta(t)\cos\theta(t)| \leq \frac{1}{2}|\varphi(t)| \underset{t\to+\infty}{\longrightarrow} 0$$ par hyp. de domination q/q'.

Commentaires

- Hypothèse $q'(x) = o(q^{3/2}(x))$ indispensable.

$a = 1$ et $q : x \mapsto \frac{1}{4x^2}$.

Alors $\int_1^{+\infty} \sqrt{q(u)}\,du = +\infty$ et $\frac{q'(x)}{q^{3/2}(x)} = -\frac{1}{2x^3} 4^{3/2} x^3$
$= -4 \not\to 0$.

résolut° de $y'' + \frac{1}{4x^2} y = 0$? → équation d'Euler.

sur $[1, +\infty[$, $\iff 4x^2 y'' + y = 0$.

On pose $x = e^t$, $t = \ln x$.

Alors : $z(x) = y(e^t)$, donc $y(t) = z(\ln t)$.

Donc
$$\begin{cases} y'(t) = \frac{1}{t} z'(\ln t) \\ y''(t) = -\frac{1}{t^2} z'(\ln t) + \frac{1}{t^2} z''(\ln t) \end{cases}$$

Ainsi $-4z'(u) + 4z''(u) + z(u) = 0$

$\Rightarrow z''(u) - z'(u) + \frac{1}{4} z(u) = 0$

Les racines de $X^2 - X + 1/4$ sont $\frac{1}{2}$ (double). car $X^2 - X + 1/4 = (X - 1/2)^2$

$\Delta = 1 - 4 \times 1 \times 1/4 = 0$,

Donc $z(u) = ae^{u/2} + bue^{-u/2}$, $a, b \in \mathbb{R}$

Donc, comme $y(t) = z(\ln t)$,

$y(t) = ae^{-\frac{1}{2}\ln t} + b \ln t \, e^{-\frac{1}{2}\ln t} = \sqrt{t}\,(a + b\ln t)$

→ ne s'annule qu'une fois (au max) (sur $[1, +\infty[$

Mais $\frac{1}{a}\int_1^x \sqrt{q(u)}\,du = \frac{1}{a}\int_1^x \frac{1}{2x}\,dx = \frac{1}{2a}\ln x > 1$.

$-\,q(t)=t,$

$$N(x) \sim \frac{1}{\pi}\int_a^x \sqrt{t}\,dt = \cancel{\frac{1}{\pi}\frac{1}{2\sqrt{x}}}$$

$$= \frac{1}{\pi}\left[\frac{2}{3}t^{3/2}\right]_a^x$$

$a=0$: $$\boxed{N(x) \sim \frac{2x^{3/2}}{3\pi}.}$$